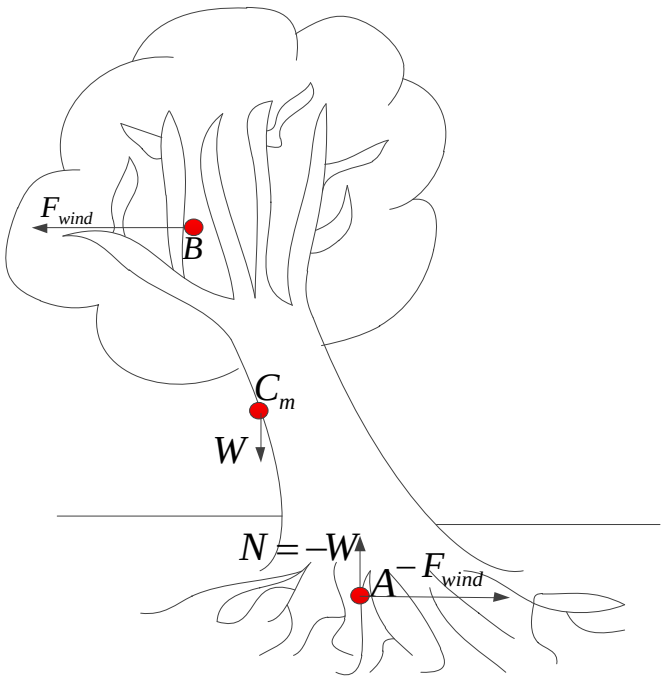
مباحث: درخت بهمراه وزش باد، سرسره ، دوچرخه ، نیروی کشش

در ادامه‌ی جلسه‌ی قبل، به تحلیل روابط حاکم بر درخت در حالتی که بر اثر وزش باد خمیده شده است و به حالت خمیده باقی مانده است می‌پردازیم. با خم‌شدن درخت، مرکز جرم آن نیز جابجا می‌شود و فرضاً در جایی که در شکل زیر نشان داده شده است قرار می‌گیرد (مرکز جرم جسم بسته به توزیع جرمی جسم می‌تواند تعیین شود و حتی ممکن است خارج از جسم نیز قرار گیرد ولی اگر جسم محدب باشد مرکز جرم آن داخل جسم قرار می‌گیرد). به دلیل اینکه نقطه اثر نیروی وزن، مرکز جرم است، نیروی وزن را نیز از مرکز جرم به سمت پایین ترسیم می‌کنیم.



نیروی دیگری که به درخت وارد می‌شود از طرف زمین به ریشه‌های آن است. نقطه اثر این نیروها که گشتاور این نیروها حول آن صفر است جایی حول و حوش ریشه‌ها قرار دارد ولی به دلیل اینکه جای دقیق آن را نمی‌دانیم، فرض می‌کنیم مطابق شکل در نقطه‌ی A قرار داشته باشد.

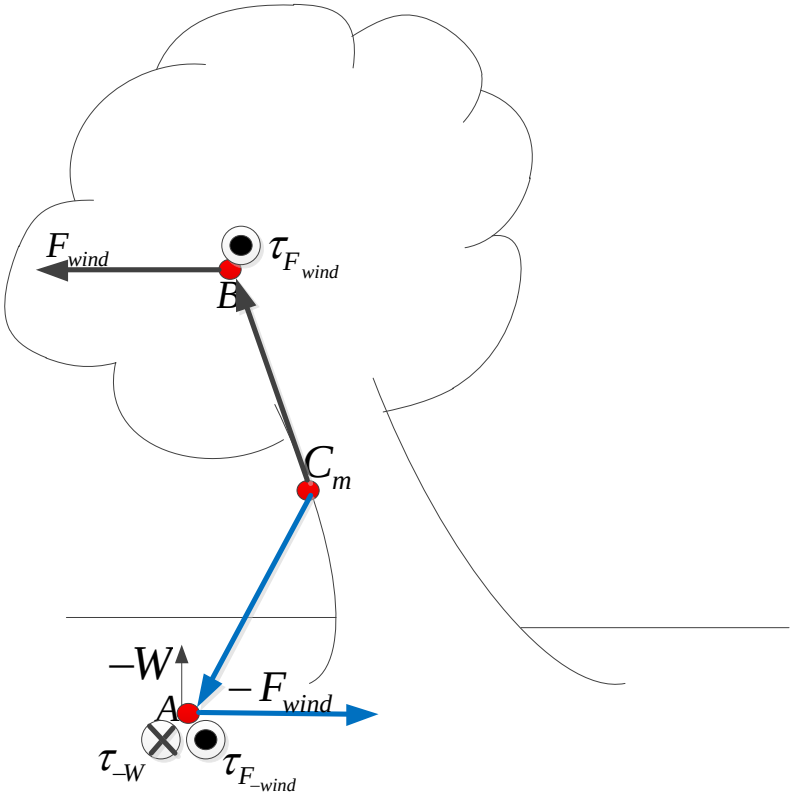
نیروی خارجی دیگر از طرف باد به درخت و خصوصاً به شاخه‌های درخت وارد می‌شود. فرض می‌کنیم باد به صورت یک‌طرفه نیرو وارد می‌کند و نقطه اثرش در B قرار دارد. به دلیل اینکه درخت خمیده مانده است و مرکز جرمش شتابی ندارد و رابطه‌ی $\sum F = M\ {}^{e}a_{C_m} = 0$ برقرار است، باید نیرویی که از طرف زمین به ریشه‌ها وارد

می‌شود هم W و هم F_{wind} را جبران کند. بنابراین نیروی $-F_{wind}$ را مطابق شکل روی مرکز اثر نیروهای وارد شونده از زمین به ریشه‌های درخت باید در نظر گرفته و رسم می‌کنیم.

بررسی $\sum F = M\ {}^{e}a_{C_m}$ به تنهایی کفایت نمی‌کند و لازم است رابطه‌ی ${}^{e}\sum \tau = {}^{e}I\ {}^{e}\dot{\omega}$ نیز در مورد درخت تحقیق شود. چون فرض کردیم درخت در حال خمیده ساکن است لذا درخت ω یا $\dot{\omega}$ی ندارد. بنابراین $\sum \tau = 0$است. رابطه‌ی گشتاور جای نقطه اثر نیروها نسبت به مرکز جرم را توجیه می‌کند. همانطور که می‌دانید گشتاور نیروی وزن حول مرکز جرم صفر است و باید گشتاور نیروهای $-W$ ، F_{wind} و $-F_{wind}$ را حول مرکز جرم بررسی نماییم. بر اساس شکل بالا و جای نقطه اثرها در آن درخت حتماً $\dot{\omega}$ پیدا می‌کند. لذا باید شکل را اصطلاح نموده و نقطه اثرها را به گونه‌ای انتخاب کنیم که درخت دورانی پیدا نکند.

بر اساس رابطه‌ی گشتاور یک نیرو حول مرکز جرم جسم، که حاصل‌ضرب خارجی بردار واصل نقطه اثر آن نیرو تا مرکز جرم در بردار نیرو است، باید توجه کنید که تنها مولفه‌ای از بردار واصل نقطه اثر نیرو به مرکز جرم در رابطه‌ی گشتاور وارد می‌شود که عمود بر راستای نیرو باشد.

اگر در شکل قبل A را آنقدر سمت چپ ببریم که در راستای C_m قرار بگیرد، گشتاور $-W$ نیز حول مرکز جرم صفر می‌شود اما باز هم F_{wind} و $-F_{wind}$ موجب دوران درخت می‌شوند. اما اگر A باز هم بیشتر به سمت چپ برده شود آن‌گاه $-W$ (با جهت درونسو) دورانی که F_{wind} و $-F_{wind}$ (با جهت برونسو) می‌خواهند ایجاد کنند را خنثی می‌کند. جهت گشتاوری که این نیروها ایجاد می‌کنند در شکل بعد نشان داده شده است.

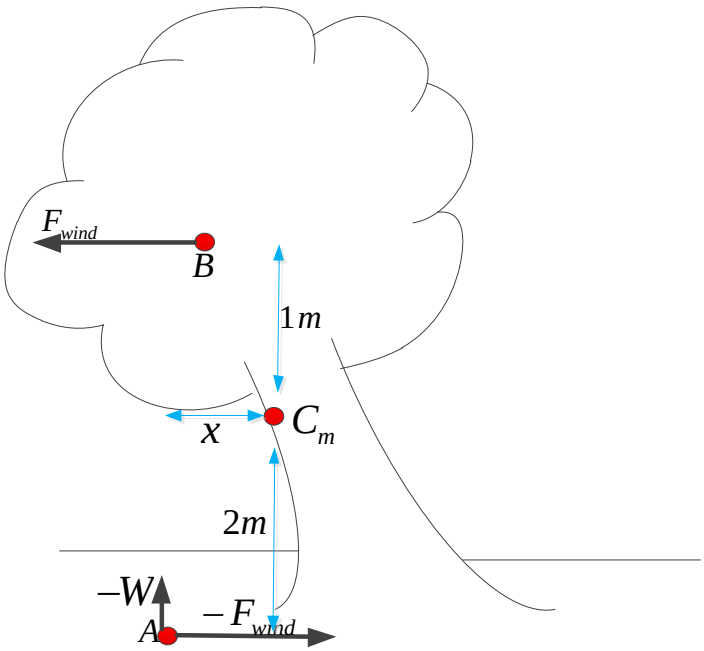


جابجا شدن مرکز اثر نیروهای وارد شونده از زمین به ریشه‌های درخت به این معنی است که نیروهایی که به ریشه‌های سمت چپ درخت وارد می‌شوند بیشتر از نیروهایی هستند که به ریشه‌های سمت راست درخت وارد می‌شوند. به همین دلیل اگر درخت دوران پیدا کند ابتدا زمین ریشه‌های سمت چپی را به راست رانده و آنها نیز ریشه‌های سمت راستی را از خاک بیرون می‌اندازند.

حال برای داشتن درک بهتر می‌توان این مسأله را به صورت عددی بررسی نمود. فرض کنید نیروی وارد شونده از طرف باد $\frac{1}{5}$ نیروی وزن باشد. فاصله عمودی مرکز جرم تا B یک متر و فاصله‌ی عمودی مرکز جرم تا A دو متر باشد. اگر x فاصله‌ی افقی مرکز جرم از A باشد(مطابق شکل بعد). مقدار x باید چقدر باشد تا درخت دوران پیدا نکند؟

باتوجه به جهت گشتاور نیروها داریم:

$$\sum \tau = 0 \rightarrow \tau_{F_{wind}} + \tau_{-F_{wind}} - \tau_{-W} = 0 \rightarrow \frac{1}{5}W \times 1 + \frac{1}{5}W \times 2 - W \times x = 0 \rightarrow x = 0.6m$$

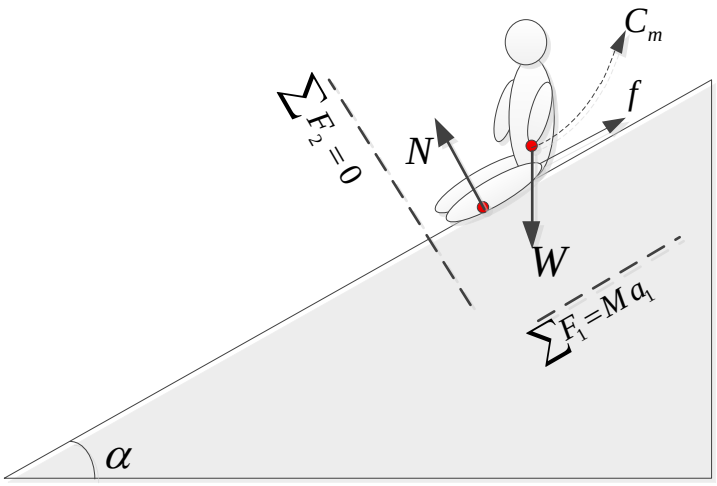


بنابراین فاصله‌ی نقطه اثر نیروهای وارد شونده از طرف زمین به ریشه‌های درخت تا مرکز جرم باید ۰/۶ متر به سمت چپ باشد تا درخت دورانی پیدا نکند.

شاید این سوال مطرح شود که چه کسی به درخت می‌آموزد که نقطه اثر نیروهایش را تغییر دهد تا از جا کنده نشود. در پاسخ باید به سخنی از حضرت علی(ع) مراجعه کنیم. ایشان فرمودند وقتی می‌بینید باد نهالی را به رقص در می‌آورد، دلیلش رقصاندن نهال نیست بلکه به این دلیل است که نهال یاد بگیرد چگونه مستحکم بایستد. با وزش باد نهال می‌آموزد که باید ریشه‌هایش را بیشتر داخل خاک برده و مستحکم‌تر گردد. این همان راه هدایتی است که خدا به همه مخلوقات و از جمله درخت نشان داده است(الذی خلق فسوی والذی قدر فهدی).

حال به مثال دیگری می‌پردازیم. می‌خواهیم برای کودکی که روی سرسره قرار دارد و امکان سر خردن دارد روابط نیرو و گشتاور نیرو را بررسی کنیم.

در این مثال از مقاومت هوا صرف‌نظر می‌کنیم. نیروی اصطکاک را با f نشان می‌دهیم و در خلاف جهت حرکت وجود دارد. شتاب در راستای حرکت وجود دارد. لذا رابطه‌ی $\sum F_1 = Ma_{C_m(1)}$ در راستای حرکت برقرار است و در راستای عمود بر حرکت، شتابی نداشته و $\sum F_2 = 0$ است.

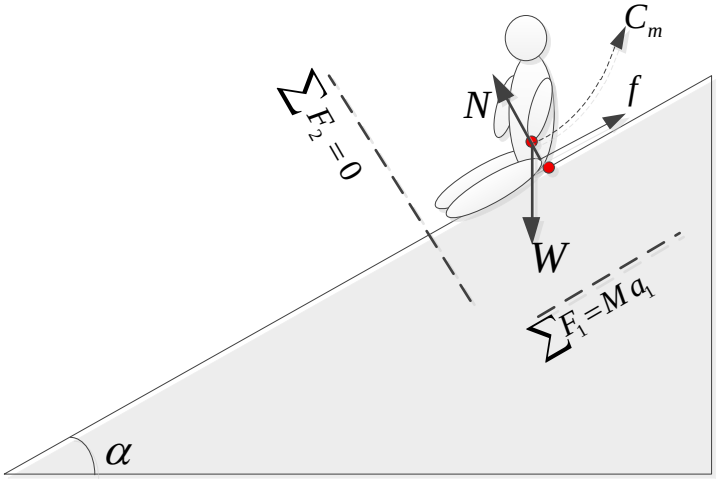


بنابراین اگر اصطکاک وجود نداشته باشد و فرضاً سطح لغزنده باشد، داریم:

$$\sum N_i = N = Mgcos(\alpha)$$

$$Mgsin(\alpha) = M\ {}^{e}a_{C_m} \rightarrow\ {}^{e}a_{C_m} = gsin(\alpha)$$

برای بررسی رابطه ی گشتاور، فرض می‌کنیم کودک حول مرکز جرم دورانی ندارد. گشتاور نیروی وزن که حول مرکز جرم صفر است. بنابراین باید گشتاور N نیز حول مرکز جرم صفر باشد. بنابراین باید نقطه اثر N جایی در راستای مرکز جرم قرار بگیرد تا حاصلضرب خارجی r در N صفر گردد(مطابق شکل بعد).



بنابراین با فرض اصطکاک صفر باید نقطه اثر N و W روی خط عمود بر سطح از مرکز جرم می‌بود تا کودک دوران نکند.

حال فرض کنید اصطکاکی با ضریب اصطکاک1.5 وجود داشته باشد. ضریب اصطکاک 1.5 به این معنی است که ضریب اصطکاک می‌تواند تا 1.5 افزایش یابد. بنابراین داریم:

$$\sum N_i = N = Mgcos(\alpha)$$

$$Mgsin(\alpha) - f = M\ {}^{e}a_{C_m} \rightarrow Mgsin(\alpha) - \mu Mgcos(\alpha) = M\ {}^{e}a_{C_m}$$

$$\rightarrow\ {}^{e}a_{C_m} = gsin(\alpha) - \mu gcos(\alpha)$$

اگر فرض کنیم زاویه α ، 30 درجه باشد، آن‌گاه:

$${}^{e}a_{C_m} = gsin(\alpha) - \mu gcos(\alpha) = 10(\frac{1}{2} - \mu\frac{\sqrt{3}}{2})$$

حال اگر:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577$$

کودک ساکن مانده و شتابی پیدا نمی‌کند. بنابراین با توجه به فرض ضریب اصطکاک 1.5 کودک نمی‌تواند حرکت کند. ولی در ادامه باید رابطه‌ی گشتاور را نیز بررسی نماییم.

ω حول مرکز جرم صفر است و تنها نیروهای اصطکاک و N حول مرکز جرم وجود دارند که می‌توانند موجب دوران کودک شوند یا از آن جلوگیری کنند. بنابراین برای آنکه f نتواند کودک را دوران دهد باید نقطه اثر N جابجا شده و به سمت چپ بیاید تا اثر f را خنثی کرده و مانع از دوران کودک بر اثر اصطکاک شود.

می‌توانید محاسبه کنید نقطه اثر نیروی N چقدر باید از مرکز جرم دور شود تا کودک بر اثر اصطکاک دوران نکند.

در مسأله سطح شیب‌دار دیدیم که$\mu_s = 1.5$ باعث شد تا کودک سر نخورد. کودک در صورتی سر می‌خورد که:

$$mg\sin(\alpha) > \mu_s mg\cos(\alpha) \rightarrow \tan(\alpha) > \mu_s$$

بنابراین یا باید α سطح را بزرگتر کنیم و یا μ_sرا کاهش دهیم.

حال اگر$\mu_s = 1.5$ باشد وα ۶۰ درجه باشد$\tan(\alpha) < \mu_s$ و کودک سر می‌خورد. شتاب حرکت کودک چه مقداری خواهد داشت؟

اگر بدانیم $\mu_k = 1$ است، نیروی اصطکاک در حال حرکت $mg\cos(\alpha)$ است. و داریم:

$$-mg\cos(\alpha) + mgsin(\alpha) = m\,{}^{e}a \rightarrow {}^{e}a = g(sin(\alpha) - \cos(\alpha)) = 10(1.7 - 0.5) = 3.5m/s^2$$

در همین مسأله اگرکودک پاهایش را بالا ببرد، چه نیرویی از طرف بدن کودک به پاهایش وارد می شود. فرض کنید جرم پاهای کودک یک سوم جرم کل بدن او می‌باشد. بنابراین رابطه‌ی برداری زیر برقرار است:

$$\sum F + \frac{1}{3}W = \frac{1}{3}M \times 3.5 \rightarrow \sum F = \frac{1}{3}M \times 3.5 - \frac{1}{3}W$$

(این عبارت باید برداری تلقی گردد و نه عددی!)

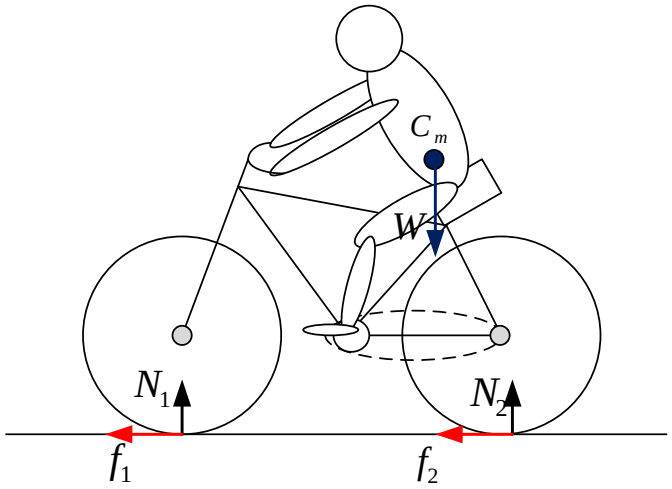
در این مثال اگر نیروی عمود بر سطح کودک ضربدر بازوی این نیرو تا مرکز جرم نتواند به اندازه‌ی نیروی اصطکاک ضربدر بازوی آن تا مرکز جرم شود، کودک دوران می‌کند. این موضوع به طول پاهای کودک بستگی دارد. به طوری که وقتی ایستاده باشد یا زاویه ی سطح شیب‌دار بزرگ باشد این دوران به سرعت اتفاق می‌افتد.

مسأله دوچرخه

فرض می‌کنیم زمین بدون شیب است.

الف) *دوچرخه می‌خواهد حرکت کند و شتاب بگیرد.*

می‌توانیم دوچرخه و دوچرخه‌سوار را یک جسم در نظر بگیریم که مرکز جرمشان در C_m قرار دارد.



مطابق شکل بالا داریم:

$$|N_1| + |N_2| = |W|$$

این رابطه حتی وقتی دوچرخه شتاب می‌گیرد نیز برقرار است.

نیروهای که زمین به دوچرخه وارد می‌کند f_1 و f_2 می‌باشد و داریم:

$$f_1 + f_2 = f = m\,{}^{e}a$$

بنابراین شتاب اولیه‌ای که دوچرخه پیدا می‌کند به نیرویی که زمین به دوچرخه وارد می‌کند بستگی دارد و وقتی زمین سر است دوچرخه سوار به سختی می‌تواند به زمین نیرو وارد کند که متقابلاً زمین نیز به آن نیرو وارد کند و دوچرخه را به جلو ببرد.

ب)*دوچرخه با سرعت ثابت حرکت می‌کند.*

در این حالت نیز در راستای عمود بر سطح افق حرکتی نداشته و رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$|N_1| + |N_2| = |W|$$

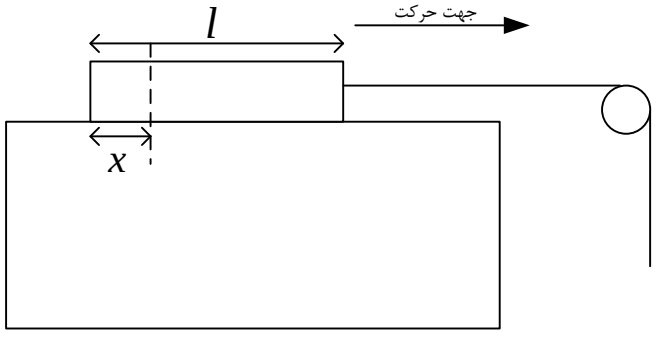
با سرعت پیدا کردن دوچرخه نیروی مقاومت هوا به آن وارد می‌شود. و چون شتاب حرکت صفر است داریم:

$$f_{\text{اصطکاک زمین}} - f_{\text{اصطکاک هوا}} = 0$$

برای حرکت شتاب‌دار باید $f_{\text{اصطکاک هوا}} < f_{\text{اصطکاک زمین}}$ باشد. این حرکت در جلسه‌ی آینده بررسی خواهد شد.

مسأله) فرض کنید مطابق شکل میله‌ای همگن به جرم ۲ کیلوگرم روی میزی قرار گرفته است. ضریب اصطکاک جنبشی میز 0.1است. نخ متصل به میله را به گونه ای می‌کشیم که نیروی ۴ نیوتنی به میله وارد می‌کند.

الف)شتاب حرکت میله را بدست آورید.



فرض کنید میله از دو بخش تشکیل شده باشد. یک بخش به طول x و بخش دیگر به طول $l - x$.

ب)نیروی مبادله شده بین این دو بخش زمانی که میله در حال حرکت است را بر حسب xبدست آورید.

ج)فرض کنید نخ جرم مشخصی داشته باشد. آیا می‌توانید با توجه به حلی که برای ب ارائه می‌کنید، در مورد نیروی کشش نخ در بخش‌های مختلف آن اظهارنظر کنید.

د) اگر جرم نخ ناچیز فرض شود، نیروی کشش نخ در بخش‌های مختلف آن به چه صورت است.